

## Scheda 1 Costruire compiti o situazioni orientate alle competenze

A) Si riportino alcuni esempi di esercizi o di proposte di lavoro ricavate da testi in adozione o dalla propria esperienza. Nei compiti riportati dovrà essere chiara la consegna per lo studente.

Argomento: **FATTORIZZAZIONE DI NUMERI INTERI**

### 2 Esercizi “classici”

#### Esercizio 1

Allo studente viene richiesto di rappresentare un numero intero “grande” come prodotto di numeri interi più piccoli. Per eseguire questa *fattorizzazione* si tenta di dividere il numero per 2, per 3, per 4 e così via fino a trovare un divisore. A questo punto si itera il procedimento partendo dall'ultimo quoziente, fino ad ottenere un numero che non si può più scomporre.

#### Esempio

#### Scomponi il numero 140

140 è divisibile per 2 e risulta  $140 : 2 = 70$ .

70 è divisibile per 2 e risulta  $70 : 2 = 35$ .

35 non è divisibile per 2.

35 non è divisibile per 3.

35 non è divisibile per 4.

35 è divisibile per 5 e risulta  $35 : 5 = 7$ .

7 non è divisibile per 2.

7 non è divisibile per 3.

7 non è divisibile per 4.

7 non è divisibile per 5.

7 non è divisibile per 6.

Abbiamo trovato che  $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ .

#### Commento 1

Questa prima tecnica è molto rozza e serve sostanzialmente ad affinare la ricerca dei divisori e a introdurre il concetto di numero primo. La prima circostanza che salta agli occhi è il fatto che il primo “fallimento” della divisione per un certo numero ci permette di escluderlo nei successivi tentativi. Riprendendo l'esempio appena svolto, notiamo che il 2 non divide il 35. Questo implica che non può dividere nemmeno un divisore di 35, tra i quali il 7. In altre parole la successione dei “candidati divisori” è sempre crescente.

La seconda osservazione riguarda i divisori composti. Riprendiamo l'esempio svolto e concentriamoci sulla riga “35 non è divisibile per 2”. E' evidente che questa circostanza implica che 35 non è divisibile nemmeno per 4, per 6 e in generale per nessun numero pari (cioè per nessun multiplo di 2). Questo ci permette di concentrare la nostra attenzione su una classe più ristretta di divisori, composta da numeri che non si possono a loro volta scomporre.

#### Esercizio 2

2) Prendendo spunto dall'esercizio precedente, allo studente viene presentata una serie di numeri che non hanno divisori propri, come 2,3,5,7. Tali numeri sono detti *numeri primi* e, come si è visto, servono a scomporre i numeri “più grandi”. Per fattorizzare un numero si va comunque per

tentativi, utilizzando però soltanto divisori primi (normalmente in questi esercizi il numero primo più grande presente nella fattorizzazione è il 7 o l'11).

### Esempio

### Scomponi il numero 140

140 è divisibile per 2 e risulta  $140 : 2 = 70$ .

70 è divisibile per 2 e risulta  $70 : 2 = 35$ .

35 non è divisibile per 2.

35 non è divisibile per 3.

35 è divisibile per 5 e risulta  $35 : 5 = 7$ .

7 è un numero primo.

Abbiamo trovato che  $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ .

### Commento 2

Normalmente il “percorso” relativo ai numeri primi termina a questo punto, rendendo l'argomento alquanto sterile. La fattorizzazione resta un'operazione fine a se stessa (tutt'al più può servire a semplificare le frazioni e a riconoscere radicali simili), meccanica e poco interessante, mentre il concetto di numero primo si riduce a uno stratagemma per risparmiare tempo (o, nel caso venga presentato il teorema di *unicità della fattorizzazione*, come il classico teorema che non serve a niente). Questo itinerario sacrifica anche ogni aspetto ludico dell'aritmetica, tappa indispensabile per tradurre conoscenze in competenze.

B) Si riscrivano i compiti precedenti orientandoli alle competenze. Si scelgano al riguardo tre competenze ritenute significative e per ciascuna di esse si costruisca una consegna (compito per lo studente).

### Consegne/Compiti

- 1) Sia  $N_{10}$  il prodotto dei primi 10 numeri naturali  $N_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$ ,  $N_{20}$  il prodotto dei primi 20 numeri naturali e in generale  $N_k$  il prodotto dei primi  $k$  numeri naturali.
  - a) Trova un numero  $A$  tale che  $A > N_{10}$  e  $N_{10}$  NON sia un divisore di  $A$ .
  - b) Dato  $N_k$ , stabilisci in modo che  $B > N_k$  e  $N_k$  NON sia un divisore di  $B$ .
  - c) Trova un numero che sia un divisore di  $N_{20}$  ma non di  $N_{10}$ .
  - d)  $N_{20}$  divide  $(N_{10})^{20}$ ? E  $(N_{10})^2$  divide  $N_{20}$ ?
  - e) Trova il più piccolo intero (ovviamente  $> 0$ ) che NON divide  $N_{20}$ .
- 2) Determina quali dei seguenti numeri sono primi: 143, 147, 149, 151. Stabilisci “criteri di ricerca” per rendere il lavoro più rapido. Qual è il numero minimo di tentativi che bisogna fare per stabilire se 899 è un numero primo? E per 1.000.001?
- 3) Calcola il numero dei divisori (compresi 1 e il numero stesso) dei seguenti interi: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 30, 60 e cerca di trovare una “legge” (*aiuto: studia i valori trovati alla luce della fattorizzazione dei numeri in fattori primi*).
  - a) In base a quello che hai osservato, stabilisci quale dei seguenti numeri ha più divisori: 66, 72 e 100.
  - b) E tra  $66 \cdot 13^{10}$ ,  $72 \cdot 13^{10}$  e  $100 \cdot 13^{10}$ ?
  - c) Trova il numero più piccolo con 12 divisori.

### Commenti

Questi esercizi servono a mettere in luce l'utilità della fattorizzazione: lo studente dovrebbe cioè rendersi conto che la rappresentazione di un numero come prodotto di fattori contiene generalmente "più informazione" della classica rappresentazione numerica. Conoscere i fattori primi permette poi allo studente di costruire altri numeri con caratteristiche specifiche. La fattorizzazione passa così dall'essere una mera "analisi" ad un vero e proprio strumento matematico. In questa fase il ruolo dei numeri primi emerge in modo naturale.

## Soluzioni

1)

- a) L'idea al quale lo studente dovrebbe arrivare è che aggiungendo 1 (o qualsiasi numero coprimo a  $N_{10}$ ) si ottiene una soluzione.
- b) Come nel caso precedente, una soluzione è  $B = N_k + 1$ . Questo particolare problema si presta ad essere utilizzato per la dimostrazione dell'infinità dei numeri primi.
- c) Anche in questo caso ci sono parecchie soluzioni, la più semplice delle quali è  $n = 11$ , visto che 11 è un numero primo.
- d) La prima domanda è molto semplice e implicitamente fa leva sull'unicità della fattorizzazione. Visto che (come osservato in precedenza) 11 è un numero primo che NON compare nella fattorizzazione di  $N_{10}$ , esso non farà parte nemmeno della fattorizzazione di  $(N_{10})^{20}$ . La seconda domanda è ben più complessa e obbliga lo studente a scomporre esplicitamente in fattori primi i due numeri. Risulta che  $N_{10} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$  e  $N_{20} = N_{10} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ . Visto che  $(N_{10})^2 = 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2$  si vede che la risposta deve essere affermativa.
- e) Alla luce del calcolo precedente i "candidati ragionevoli" sono 23,  $2^{19}$ ,  $3^9$ ,  $5^5$ ,  $7^3$ . Ovviamente 23 è il più piccolo.

2) Questo esercizio si basa sulla classica fattorizzazione di numeri interi. Il vero problema consiste nell'elaborare la strategia migliore per ridurre le "prove inutili". Gli studenti dovrebbero essere in grado di capire (anche alla luce del problema precedente) che gli unici candidati sono i numeri primi. Il problema della fattorizzazione di 899 dovrebbe indurre lo studente a chiedersi se sia ragionevole provare tutti i numeri primi minori di 899 (evidentemente bastano i numeri primi  $< \sqrt{899}$ , cioè fino al 29).

3)

a) In questo problema, lo studente dovrebbe essere in grado di indurre una regola generale analizzando casi via via più articolati. Di nuovo viene messo in luce come la rappresentazione in fattori primi permetta di spiegare alcuni risultati altrimenti "oscuri".

Risulta infatti che...

$D(2) = 1, 2 \rightarrow 2$	$D(8) = 1, 2, 4, 8 \rightarrow 4$
$D(3) = 1, 3 \rightarrow 2$	$D(10) = 1, 2, 5, 10 \rightarrow 4$
$D(4) = 1, 2, 4 \rightarrow 3$	$D(30) = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \rightarrow 8$
$D(5) = 1, 5 \rightarrow 2$	$D(60) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 \rightarrow 12$
$D(6) = 1, 2, 3, 6 \rightarrow 4$	

L'insegnante dovrebbe porre l'accento su alcuni casi significativi, relativi p.e. i casi  $2, 2^2, 2^3$ ,  $D(30) = D(3) \cdot D(10) = D(5) \cdot D(6)$ , che sembra parzialmente contraddetto da  $D(60) = D(3) \cdot D(20) = D(5) \cdot D(12) \neq D(2) \cdot D(30)$ .

b) Grazie alla “legge” trovata il problema seguente (numero di divisori di 66, 72 e 100) si riduce sostanzialmente a una fattorizzazione in fattori primi e il problema seguente ( $66 \cdot 13^{10}$ ,  $72 \cdot 13^{10}$  e  $100 \cdot 13^{10}$ ) evidentemente non cambia il risultato.

c) Questo problema è sicuramente il più complesso. Il metodo più intelligente consiste nel vedere in quanti modi utili “diversi” può essere scomposto il 12. Risulta  $12 = \boxed{6 \cdot 2} = \boxed{3 \cdot 2 \cdot 2} = \boxed{4 \cdot 3}$ . I numeri più piccoli con 12 fattori sono quindi  $2^5 \cdot 3 = 96$ ,  $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$  oppure  $2^3 \cdot 3^2 = 72$ . La risposta è ovviamente 60. Come si vede, anche in questo esercizio le fattorizzazioni di un intero vengono “usate” in modo creativo e costruttivo.

C) Per ciascuna delle competenze sopra riportate si scrivano gli indicatori che ne rilevino la padronanza.

In tutti i casi il livello base è rappresentato dallo studente che va per tentativi, il livello medio dallo studente che elabora un metodo ordinato o uno schema (anche senza cercare una regola generale) e il livello più avanzato dallo studente che riesce a capire (o perlomeno cerca) regole e leggi e che, prendendo spunto dagli esercizi proposti, inventa problemi più complessi.